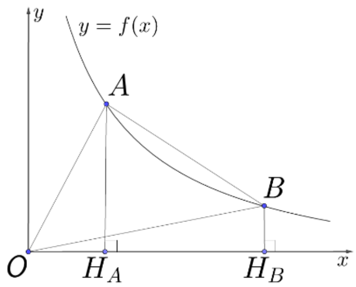
Вариант 1

1. У Олега есть 1000 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы двадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)
2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF. Решение обоснуйте.

4. Пусть x_1 и x_2 – наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$. Решение обоснуйте.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0 \end{cases}$.

6. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86+\ldots}}}$

7. Известно, что число $\cos 12^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - 1 = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и радикалов.)

8. Пусть A и B – некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (Другими словами, множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B. Если, например, $A = \{0,1,2\}, B = \{1,2\}$, то $C = \{1,2,3,4\}$.)
Известно, что $C = \{0,1,2, \ldots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен
$$\max A = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2020} + \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2020}$$
Докажите или опровергните следующие утверждения: 1) множество A и множество B содержат конечное число членов; 2) все элементы множеств A и B – целые числа; 3) $\max B \geq 2$.